Bibliographie

[Aro, 1858] S. Aronhold. **Theorie der homogenen Functionen dritten Grades von drei Veränderlichen.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LV: S. 97–191, 1858. *Invariantentheorie, symbolische Notation.*

[Aro, 1863] S. Aronhold. **Über eine fundamentale Begründung der Invariantentheorie.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXII: S. 281–345, 1863.

[Bou, 1968] N. Bourbaki. **Groupes et algèbres de Lie, Chapitres 4,5,6**. Nr. XXXIV in: Éléments de mathématique. Hermann, Paris, 1968. *Coxeter-Gruppen und Tits-Systeme, von Reflexionen erzeugte Gruppen, Wurzel-Systeme. Sehr umfangreich. Speziell: Weyl-Gruppen von Wurzel-Systemen (bsp. $W(E_6)$); Coxeter-Graphen, Dynkin-Graphen, Klassifikation der Wurzel-Systeme (schöne Übersicht am Ende).*

[Cay, 1849] A. Cayley. **On the triple tangent planes to a surface of the third order**. Camb. and Dublin Math. Journal, IV: S. 118–132, 1849. *In Verbindung mit [Sal, 1849]. Ergebnisse des Briefwechsels mit Salmon: Auf einer glatten kubischen Fläche liegen genau 27 Geraden.*

[Cay, 1869] A. Cayley. **A Memoir on Cubic Surfaces**. Philos. Trans. Royal Soc., CLIX: S. 231–326, 1869. *Klassifikation der kubischen Flächen nach ihren Singularitäten in 23 Typen. Basiert auf und ergänzt [Sch, 1863a].*

[CG, 1873] A. Clebsch und Gordan. **Über cubische ternäre Formen**. Mathematische Annalen, VI: S. 436–512, 1873. *§1: aus binären cubischen Formen ternäre bilden (Anwendung von Th. X aus [Cle, 1861c]).*

[Cle, 1861a] A. Clebsch. **Ueber die Knotenpunkte der Hesseschen Fläche, insbesondere bei Oberflächen dritter Ordnung**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LIX: S. 193–228, 1861. *Grundsätzliches* *zur Hessefläche. Deren Verallgemeinerung auf Flächen vom Grad n ist vom Grad $4(n-2)$ und hat $10(n-2)^3$ Knotenpunkte. Beweis, daß die Gleichung einer kubischen Fläche in Pentaederform geschrieben werden kann.*

[Cle, 1861b] A. Clebsch. **Zur Theorie der algebraischen Flächen.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LIIX: S. 93–108, 1861. *Explizite Gleichung einer Covariante neunter Ordnung, deren Schnitt mit einer kubischen Fläche aus den 27 Geraden besteht.*

[Cle, 1861c] A. Clebsch. **Über symbolische Darstellung algebraischer Formen**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LIX: S. 1–62, 1861. *Symbolische Notation, Transferenz Prinzip (S. 30: Theorem X und Erläuterungen).*

[Cle, 1864] A. Clebsch. **Zur Theorie der algebraischen Flächen**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXIII: S. 14–26, 1864. *Flächensystem der Ordnung $8n-14$ durch Punkte, in denen 2 Geraden 4-punktig berühren. Für kubische Flächen liefert der Schnitt der 27 Geraden mit einer dieser Flächen die 135 Schnittpunkte der Geraden untereinander.*

[Cle, 1866] A. Clebsch. **Die Geometrie auf den Flächen dritter Ordnung**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXV: S. 359–380, 1866. *Jede kubische Fläche entsteht durch Aufblasen des $\mathbf{P}^2$ in 6 Punkten. Behandlung des Linearsystems der ebenen Kubiken durch 6 Punkte. Betrachtung des Spezialfalls, in dem alle Punkte auf einer Konik liegen. Basiert auf [Sch, 1863b].*

[Cle, 1871] A. Clebsch. **Ueber die Anwendung der quadratischen Substitution auf die Gleichungen 5ten Grades und die geometrische Theorie des ebenen Fünfseits**. Math. Ann., IV: S. 284–345, 1871. *§§16-18: über die Diagonalfläche; im Zusammenhang mit der Auflösung einer Gleichung fünften Grades.*

[CLO, 1997] D. Cox, J. Little, und D. O'Shea. **Ideals, Varieties, and Algorithms**. Springer-Verlag, New York, 2. Auflage, 1997. *Eine gut zu lesende, ausführliche und anwendungsbezogene Einführung ins Thema. Ein Schwerpunkt liegt auf konkreten Berechnungen, daher beispielsweise ein umfangreiches Kapitel zu Gröbnerbasen.*

[CLO, 1998] D. Cox, J. Little, und D. O'Shea. **Using Algebraic Geometry**. Springer-Verlag, New York, 1998. *Anwendung der in [CLO, 1997] dargestellten Theorie auf Robotik, Codierungstheorie, Integer-Programmierung etc.*

[Cob, 1915] A. B. Coble. **Point sets and allied Cremona Groups**. Transactions of the American Mathematical Society, XVI: S. 155–198, 1915. *Anwendung auf kubische Flächen: explizite Gleichungen der Fläche und der Tritangentialebenen, ausgehend von 6 Punkten im* $\mathbf{P}^2$ *und umgekehrt: Berechnung der 6 Punkte aus einer gegebenen Hexaederform der Fläche.*

[Con, 1985] J. H. Conway. **Atlas of finite groups**. Clarendon Press, Oxford, 1985. *Die wichtigsten Informationen zu allen endlichen einfachen Gruppen. Speziell: Verschiedene Konstruktionen von* $U_4(2) \simeq S_4(3)$, *der einfachen Index-2-Untergruppe von* $W(E_6)$ *(der Gruppe der Inzidenz-erhaltenden Permutationen der 27 Geraden einer kubischen Fläche).*

[Cre, 1868] Cremona. **Mémoire de géometrie pure sur les surfaces du troisième ordre**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXVIII: S. 1–133, 1868. *Beweis der Sätze aus [Ste, 1857] und einiges mehr.*

[Dic, 1901] Dickson. **Linear Groups with an Exposition of the Galois Field Theory**. B. G. Teubner, Leipzig, 1901. *Gruppen allgemein, ausführliche Behandlung der Automorphismengruppe der 27 Geraden (Kap. XIV: S. 303-307) und deren einfacher Index-2-Untergruppe (§§270-275: S. 292-298).*

[Die, 1871] J. Diekmann. **Über die Modifikationen, welche die ebenen Abbildungen einer Fläche** 3^{ter} **Ordnung durch Auftreten von Singularitäten erhält.** Math. Ann., (4): 442–475, 1871.

[DO, 1988] I. Dolgachev und D. Ortland. **Point sets in projective spaces and theta functions**. Astérisque 165. Société Mathématique de France, 1988. *Darstellung der hauptsächlich auf Coble basierenden Theorie in einer für den modernen Mathematiker verständlichen Sprache. Z.B. Blowing-Up of point sets. Beispiel: Kubische Flächen.*

[Fis, 1986] G. Fischer. **Mathematische Modelle / Mathematical Models**. Vieweg, 1986. Bildband und Kommentarband. *Photos vieler Gips-Modelle der Rodenberg-Serie. Beziehung zwischen Coxeterdiagrammen und Singularitäten, die durch „Zusammenziehen" der Durchgänge entstehen. Knappe Übersicht, gute Literaturangaben.*

[Fis, 1994] G. Fischer. **Ebene algebraische Kurven**. Vieweg, 1994. *Tangenten, Singularitäten, Polare, Hesse-Kurve, Duale Kurve etc.*

[FM, 2000] R. Friedman und J. W. Morgan. **Exceptional Groups and del Pezzo Surfaces**. math.AG / 0009155, 2000.

[Gei, 1870] Geiser. **Über die Steinerschen Sätze von den Doppeltangenten der Curven vierten Grades.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXXII: S. 370–378, 1870. *Insbesondere Abschnitt V: Kurve vierten Grades als Porjektion einer kubischen Fläche S von einem Punkt $P \in S$ auf eine Ebene E. Die 28 Bitangenten sind dann die 27 Bilder der 27 Geraden auf S und die letzte Gerade ist der Schnitt der Tangentialebene in P mit E.*

[GH, 1994] P. Griffith und J. Harris. **Principles of Algebraic Geometry**. Wiley Classics Library, 1994. *Auch spezielle Behandlung kubischer Flächen, z.B. S. 489: jede glatte kub. Fl. erhält man durch Blow-Up des $\mathbf{P}^2$ in 6 Punkten allgemeiner Lage; S. 636-640: kubische Flächen mit gewöhnlichen Doppelpunkten als Blow-Up des $\mathbf{P}^2$ in 6 Punkten spezieller Lage.*

[Gra, 1855] H. Graßmann. **Die stereometrischen Gleichungen dritten Grades, und die dadruch erzeugten Oberflächen**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), IL: S. 47–65, 1855. *Beispielsweise §5: Die Oberfläche dritter Ordnung als Durchschnitt dreier projectivischer Bündel.*

[Har, 1977] R. Hartshorne. **Algebraic Geometry**. Springer-Verlag New York Inc., 1977.

[HCV, 1932] D. Hilbert und S. Cohn-Vossen. **Anschauliche Geometrie**. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1932. *Wirklich sehr anschaulich. Bsp.: Schläflis Doppel-Sechs auf Würfelseiten (§25) oder: Die Krümmung auf Flächen (§§28,29).*

[Hen, 1911] A. Henderson. **The Twenty-Seven Lines upon the Cubic Surface**. Hafner Publishing Co., 1911.

[Hun, 1996] B. Hunt. **The Geometry of some special Arithmetic Quotients**. Springer Verlag,, 1996. .

[Jor, 1869] C. Jordan. **Sur les équations de la géometrie.** Comptes Rendus, LXVIII: S. 656–659, 1869. *Beziehung zwischen der Galoisgruppe der Gleichung der 27 Geraden auf einer kubischen Fläche und der Gleichung der 28 Doppel-Tangenten an eine Kurve vierter Ordnung.*

[Jor, 1957] C. Jordan. **Traité des Substitutions et des Equations Algébriques**. Gaultiers-Villars, Paris, 1957. Neuauflage (Original v. 1869). *Vieles zum Thema. Beispielsweise der erste Beweis, daß die Lösungen der Gleichung, von der die 27 Geraden abhängen, nicht durch Gleichungen vom Grad kleiner 27 gefunden werden können.*

[Kae, 1999] R. Kaenders. **Die Diagonalfläche aus Keramik**. DMV-Mitteilungen, 4/99, 1999. *Über die Erstellung und mathematische Hintergründe zum Keramikmodell der Clebschfläche in Düsseldorf.*

[Kle, 1873] F. Klein. **Über Flächen dritter Ordnung**. Math. Annalen, VI: S. 551–581 und Tafeln I–VI, 1873. Auch in: [Kle, 1922], S. 11-62. *Bes. interessant: Ableitung neuer Flächen aus der Fläche mit vier reellen Knoten. Ableitung des biplanaren Knoten aus dem konischen etc.*

[Kle, 1922] F. Klein. **Gesammelte Mathematische Abhandlungen**, Band II. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1922. *Enthält z.B. [Kle, 1873] inkl. zweier Zusätze. Auch die Vorbemerkungen zu den Arbeiten über anschauliche Geometrie (S. 3-6) sind lesenswert.*

[Kle, 1926] F. Klein. **Vorlesungen über die Entwicklung der Mathematik im 19. Jahrhandert**, Band I. Verlag von Julius Springer, Berlin, 1926. *Sehr schön und anschaulich geschrieben. Siehe beispielsweise S. 122 zum Beweis Plückers des Pascalschen Satzes (Benutzung des „Plückerschen μ"). Auch viel Biographisches und Persönliches zu den Mathematikern dieses Jahrhunderts.*

[KM, 1987] H. Knörrer und T. Miller. **Topologische Typen reeller kubischer Flächen**. Mathematische Zeitschrift, 195, 1987. *Geraden auf reellen kubischen Flächen; Topologie r. kub. Fl.; Klassifikation; Auflistung aller Typen.*

[Kun, 1994] E. Kunz. **Algebra**. Vieweg, Braunschweig, 2. Auflage, 1994.

[Kun, 1997] E. Kunz. **Einführung in die algebraische Geometrie**. Vieweg, Braunschweig, 1997.

[Lab, 2001a] O. Labs. ***Cubic Surface Program***. `http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/cubicsurface/xcsprg.html`, 2001. *Das Programm und dessen Kurz-Dokumentation.*

[Lab, 2001b] O. Labs. **Singular-Skript zur Diplomarbeit**. `http://enriques.mathematik.uni-mainz.de/~olila/diplomarbeit/explicite`, 2001. *Das Skript stellt alle im 3. Kapitel dieser Arbeit eingeführten Notationen bereit, so daß Berechnungen damit leicht möglich sind.*

[Man, 1974] Y. I. Manin. **Cubic Forms - Algebra, Geometry, Arithmetic**. North-Holland Publishing Company, 1974. *Moderne Behandlung kubischer Flächen; viele Resultate allgemein für del Pezzo Flächen formuliert, beispielsweise §25: Picard-Gruppe und Wurzel-Systeme, §26: exzeptionelle Kurven und Weyl-Gruppen.*

[Pas, 1922] E. Pascal. **Repetitorium der höheren Mathematik**, Band II: Geometrie, 2. Hälfte: Raumgeometrie. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin, 2 Auflage, 1922. *Insbes. Kap. XXXIV: Flächen dritter Ordnung v. L. Berzolari (S. 783-849); dies ist im Wesentlichen eine umfangreiche Bibliographie in Prosa-Form.*

[PT, 2000] E. Peyre und Y. Tschinkel. **Tamagawa Numbers of Diagonal Cubic Surfaces of Higher Rank**. math.AG / 0009092, 2000.

[Rei, 1988] M. Reid. **Undergraduate Algebraic Geometry**. Cambridge University Press, 1988. *Leicht verständliche erste Einführung ins Thema. Ein strikter Beweis für die Existenz einer Geraden auf einer kubischen Fläche. Ermittlung der Inzidenzrelationen der 27 Geraden.*

[Rod, 1879] C. Rodenberg. **Zur Classification der Flächen dritter Ordnung**. Math. Ann., XIV, 1879. *Ermittlung der kubischen Fläche zu einem gegebenen Pentaeder.*

[Rod, 1904] C. Rodenberg. **Modelle von Flächen dritter Ordnung**, in: [Sch, 1904]. 1904. *Erläuterungen zu den vom Autor selbst erstellten Gipsmodellen (s. [Sch, 1911]).*

[Sal, 1849] G. Salmon. **On the triple tangent planes to a surface of the third order**. Camb. and Dublin Math. Journal, IV: S. 252–260, 1849. *In Verbindung mit [Cay, 1849]. Ergebnisse des Briefwechsels mit Cayley: Auf einer glatten kubischen Fläche liegen genau 27 Geraden.*

[Sal, 1879] G. Salmon. **Analytische Geometrie des Raumes**, Band I. B. G. Teubner, Leipzig, 3. Auflage, 1879. *Als Einführung zu [Sal, 1880] lesenswert. Hauptsächlich zwar über Flächen zweiten Grades, aber Einführung einiger Konzepte (z.B. Polare, Dualität (Reziprocalfläche)).*

[Sal, 1880] G. Salmon. **Analytische Geometrie des Raumes**, Band II. B. G. Teubner, Leipzig, 3. Auflage, 1880. *Unbedingt lesenswert. Sehr anschaulich, daher aber teilweise nicht ganz exakt geschrieben und begründet. Insbes. Kap. 1 (Allg. Theorie der Flächen, insbes. S. 1-33: Polaren, Hessesche, Reciprokalfläche, ...) und Kap. 5 (Von den Flächen dritter Ordnung). Sehr umfangreich und informativ.*

[Sch, 1858] L. Schläfli. **An attempt to determine the twenty-seven Lines upon a Surface of the third Order, and to divide such Surfaces into Species in Reference to the Reality of the Lines upon the Surface**. Quarterly Journal for pure and applied Mathematics, II: S. 55–66, S. 110–220, 1858. (auch in: [Sch, 1953]: S. 198-218). *Fünf Klassen von kubischen Flächen, je nach Realität der Geraden. Entdeckung der Doppel-Sechs und Einführung dieser Notation.*

[Sch, 1863a] L. Schläfli. **On the Distribution of Surfaces of the Third Order into Species, in reference to the presence or absence of Singular Points and the reality of their Lines**. Philos. Trans. Royal Soc., CLIII: S. 193–241, 1863. (auch in: [Sch, 1953]: S. 304-362). *Erste Klassifikation der kubischen Flächen in 23 Typen, abhängig von den Singularitäten.*

[Sch, 1863b] H. Schröter. **Nachweis der 27 Geraden auf der allgemeinen Oberfläche dritter Ordnung.** Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LXII: S. 265–280, 1863. *Basiert auf [Gra, 1855, §5].*

[Sch, 1904] M. Schilling, Hrsg. **Mathematische Abhandlungen aus dem Verlage Mathematischer Modelle von Martin Schilling**. Schilling, Halle a. d. Saale, 1904. *Enthält: Abhandlungen zu den Serien 1-23; mit 71 Figuren auf 6 Tafeln und im Text, z.B. [Rod, 1904].*

[Sch, 1911] M. Schilling. **Catalog mathematischer Modelle für den höheren Mathematikunterricht**. Verlag von Martin Schilling, Leipzig, 1911. *Der Verlag verkaufte damals reale, physische Modelle mathematischer Flächen (aus Gips u.ä.). Der Katalog besteht aus einer Preisliste und kurzen Erläuterungen (im Falle der Rodenberg-Serie aber keine Gleichungen) zu den Flächen im Stil: 'entsteht aus ... durch Zusammenziehen der Hälse'.*

[Sch, 1953] L. Schläfli. **Gesammelte Mathematische Abhandlungen**, Band II. Verlag Birkhäuser, Basel, 1953. *Enthält [Sch, 1858] und [Sch, 1863a] über die Klassifikation der kubischen Flächen.*

[Seg, 1942] B. Segre. **The non-singular Cubic Surfaces**. Clarendon, Oxford, 1942. *Interessante ebene Darstellung der 27 Geraden: als Grenzgeraden, wenn die glatte kubische Fläche gegen eine in drei Ebenen degenerierte konvergiert. Damit werden die Gruppe der 27 Geraden, reelle kubische Flächen und der Sylvestersche Pentaeder studiert.*

[Ser, 1966] J.-P. Serre. **Algèbres de Lie semi-simples complexes**. Benjamin, New York, 1966. *Kap. V: Wurzelsysteme, deren Weyl-Gruppe, Coxeter-Graphen, Dynkin-Graphen.*

[Ste, 1857] Steiner. **Über die Flächen dritten Grades**. Journal für die reine und angewandte Mathematik (auch Crelles Journal bzw. Borchardts Journal genannt), LIII, 1857. *Formulierung vieler neuer Sätze und Ideen, ohne Angabe von Beweisen. Ausgangspunkt für die Forschung der folgenden Jahre. Viele Beziehungen zwischen Polare, „Kernfläche", Geraden, Tritangentialebene etc. Beweise in [Cre, 1868] und [Stu, 1867].*

[Stu, 1867] R. Sturm. **Synthetische Untersuchungen über Flächen dritter Ordnung**. B. G. Teubner, Leipzig, 1867. *Beweis der Sätze aus [Ste, 1857] und vieles mehr.*

[Suz, 1982] M. Suzuki. **Group Theory**, Band I. Springer, Berlin, 1982. *Gruppentheorie. Speziell S. 310-370: Weyl-Gruppen, Coxeter-Gruppen, allerdings nichts über Weyl-Gruppen von Wurzelsystemen (dazu: [Bou, 1968]). Überblick über die endlichen einfachen Gruppen.*

[Syl, 1851] Sylvester. **Sketch of a memoire on elimination, transformation and canonical forms**. Cambridge and Dublin Math. Journal, VI: S. 186–200, 1851. *Erstmalige Formulierung der Behauptung, daß eine kubische Fläche sich in Pentaederform bringen läßt, Beweis in [Cle, 1861a].*

[vSL, 2000] D. van Straten und O. Labs. **The Cubic Surface Homepage**. `http://www.CubicSurface.net/`. Arbeitsgruppe Algebraische Geometrie an der Joh. Gutenberg Universität Mainz, 2000. *Viele Informationen, Bilder, Filme zu kubischen Flächen.*